Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Défauts de production, durée de vie et intervalle de confiance (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m·s⁻¹ lorsque son système de freinage est activé. Sa vitesse est étudiée par une équation différentielle, puis par l'étude de fonction, le calcul d'une distance parcourue et un développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie pour $y' + ay = 0$ donne directement les solutions en prenant $a = 0{,}8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$, ce qui correspond au second membre de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0{,}8g(t) = 4$: g est solution de (E).

Question 1. c. Déduire des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant la solution particulière $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $k + 5 = 20$, puisque $e^0 = 1$. Donc $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0{,}8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 \to 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. On admet que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme l'exponentielle est strictement positive, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur $[0; +\infty[$. La fonction décroît de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais : elle tend vers 5 m·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

En dérivant $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$. Donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $F(1) - F(0)$. En substituant les bornes, $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m, soit environ $15{,}3251$ m. L'arrondi au centimètre est donc $15{,}33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m, soit $15{,}33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : parmi les trois propositions, recopier la réponse donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte ; aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. La proposition correcte est celle qui ajoute à cette partie régulière un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

La tangente en $t = 0$ a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Ici, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12$, donc on obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Défauts de production, durée de vie et intervalle de confiance

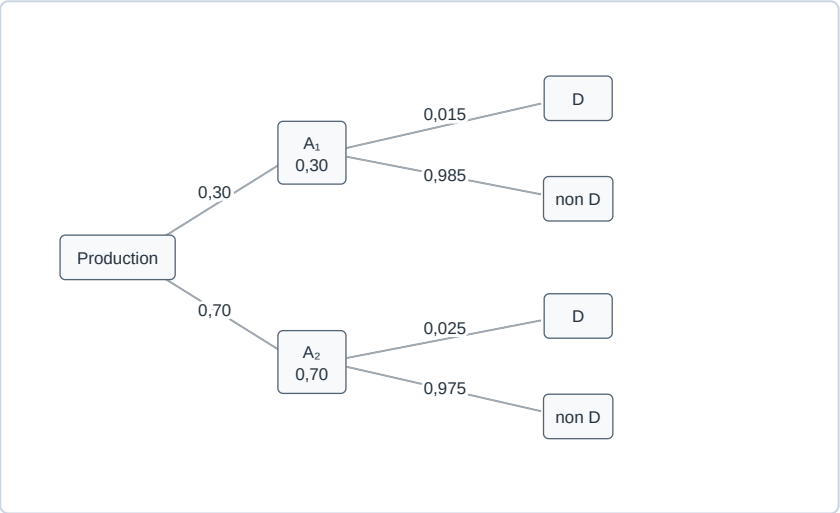
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des parts de production et des taux de défaut distincts. L'exercice étudie aussi la durée de bon fonctionnement des tubes selon une loi exponentielle et estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs taux de défaut, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

La première bifurcation distingue les deux ateliers : 30 % des tubes viennent de l'atelier 1 et 70 % de l'atelier 2. À partir de chaque atelier, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités conditionnelles de défaut sont celles données dans le sujet ; les probabilités complémentaires sont obtenues en les retranchant de 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Chaque branche issue d'un atelier se partage entre défaut et absence de défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), atelier 2 (0,70) ; défaut : 0,015 depuis l'atelier 1 et 0,025 depuis l'atelier 2.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

1. La probabilité recherchée correspond au chemin « atelier 1 puis défaut ». Elle est égale à la probabilité de produire dans cet atelier multipliée par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier.
2. On obtient donc $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 % de la production totale.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,0195, comme indiqué dans l'énoncé.**

Les événements « le tube vient de l'atelier 1 » et « le tube vient de l'atelier 2 » forment une partition de la production. La probabilité d'un défaut est donc la somme des probabilités des deux chemins menant à un défaut : $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. Sur la page originale, 0,0195 est barré et remplacé à la main par 0,0220, valeur conforme aux données des deux ateliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,0220$. La valeur 0,0195 imprimée est barrée et corrigée à 0,0220 sur le sujet.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

1. On cherche la proportion de tubes venant de l'atelier 2 parmi les tubes sans défaut. Le numérateur est la probabilité du chemin « atelier 2 et sans défaut » : $0,70 \times 0,975$.
2. La probabilité d'absence de défaut vaut $1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,70 \times 0,975}{0,978} \approx 0,6979$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,6979$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée T de bon fonctionnement d'un tube suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0,0001$, on calcule $E(T) = \frac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. Cette espérance décrit la durée moyenne de bon fonctionnement dans la population des tubes. Elle ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement 10 000 heures, ni que cette durée est garantie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : c'est la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

1. Le sujet donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour $t = 8\,000$, l'exposant vaut $-0,0001 \times 8\,000 = -0,8$.
2. Ainsi, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,8} \approx 0,5507$. La loi exponentielle étant continue, les probabilités avec $<$ et $\leq$ sont identiques en ce point. L'arrondi au centième donne 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$, au centième.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser une durée donnée est le complément de celle de l'atteindre ou de la dépasser : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, $\lambda t = 0,0001 \times 10\,000 = 1$, donc $P(T > 10\,000) = e^{-1} \approx 0,3679$. En arrondissant cette valeur au centième, on obtient 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$, au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. La fréquence s'obtient en divisant le nombre de rivets conformes par l'effectif total prélevé.

Rivets conformes	Effectif prélevé	Estimation f
975	1 000	$975/1000 = 0,975$

La proportion estimée est donc de 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes au millième.**

On applique la formule fournie avec $f = 0,975$ et $n = 1000$. La marge est $1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1000}} \approx 0,009676$. Les bornes se calculent en soustrayant puis en ajoutant cette marge à f ; chacune est ensuite arrondie au millième.

Borne	Valeur arrondie
Inférieure	0,965
Supérieure	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure deux heures et son coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Elle porte sur le freinage d'un chariot, les défauts et la durée de vie de tubes fluorescents, puis la conformité de rivets. Elle évalue équations différentielles, analyse, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière.
- La limite de f en $+\infty$ permet d'identifier une asymptote horizontale ; le signe de f' détermine les variations.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, où f est la fréquence observée et n l'effectif.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle.
- Pour le freinage, relier la limite de la vitesse à la possibilité d'un arrêt et justifier la réponse.
- Attention : les données des deux ateliers donnent P(D) = 0,022, alors que la question imprimée demande de montrer P(D) = 0,0195.
- Respecter les unités et les arrondis demandés : probabilités au centième et bornes de l'intervalle au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle avec l'arbre ?

La probabilité d'une intersection se calcule en multipliant les probabilités des branches correspondantes. Pour une probabilité conditionnelle, divisez la probabilité de l'intersection par celle de l'événement conditionnant.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Avancez d'abord sur les questions accessibles, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les réponses reportées.

Q : Que faire de la valeur de P(D) indiquée dans la question 3 ?

Les données imprimées donnent $0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$, et non 0,0195. Signalez clairement cette incohérence dans votre copie et appuyez votre démarche sur les données de l'énoncé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation de Systèmes Automatiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.