Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, initialement lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f. L'étude mobilise une équation différentielle, les variations et la limite de f, le calcul d'une distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule des solutions de $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$, et la constante k est réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. Donc $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière, ici 5, à la solution générale de l'équation homogène associée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = k + 5 = 20$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Comme $e^{-0,8t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Il reste donc la constante 5.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction décroît de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		–
$f(t)$	20	↘ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout instant fini, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ sans atteindre zéro.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant F, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$, soit exactement $f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **Calculer la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ en utilisant l'intégrale de f. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centimètre.**

Par intégration, $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \text{m}$, au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Une seule réponse est correcte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La troisième proposition est la bonne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en zéro est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

Un système électrique entrée-sortie, de fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1), reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1), défini à l'aide de la fonction échelon unité. L'exercice demande de déterminer les transformées de Laplace, d'établir le signal de sortie par intervalles et d'étudier sa représentation graphique et sa limite.

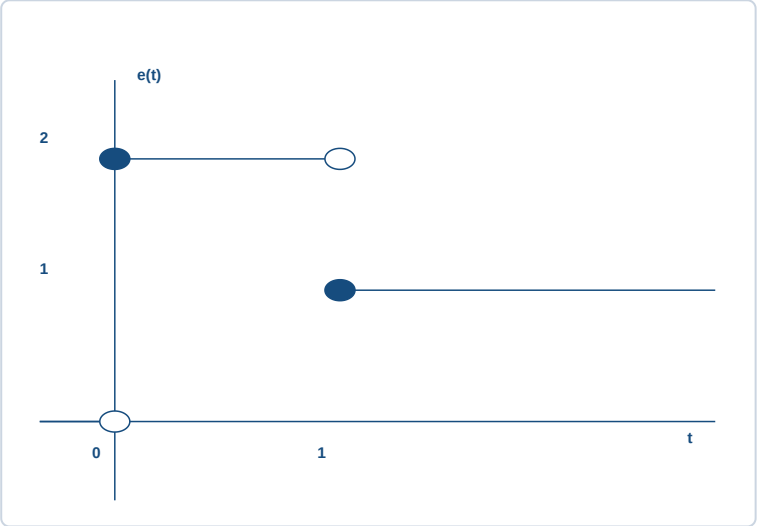
Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est nul avant 0. À partir de 0, il vaut 2 jusqu'à 1 exclu, puis 1 dès t = 1.

- Palier 2 : point fermé en t = 0, ouvert en t = 1.
- Palier 1 : point fermé en t = 1.

Signal d'entrée e(t)



> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> e(t) = 0 si t < 0 ; 2 si 0 ≤ t < 1 ; 1 si t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = \frac{1}{p}$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = \frac{e^{-p}}{p}$. Donc $E(p) = 2 \times \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

1. La relation du système donne $S(p) = H(p)E(p)$.
2. En remplaçant $H(p) = \frac{1}{p+1}$ et $E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$, on obtient $S(p) = \frac{2-e^{-p}}{p(p+1)}$.
3. On sépare les deux termes pour retrouver l'égalité demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En mettant au même dénominateur, $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}$. L'égalité est vérifiée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

On utilise les transformées usuelles puis la propriété de retard d'une unité : la multiplication par e^{-p} correspond au facteur $U(t-1)$.

- $\mathcal{L}^{-1}\{1/p\} = U(t)$
- $\mathcal{L}^{-1}\{1/(p+1)\} = e^{-t}U(t)$
- $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-p}/p\} = U(t-1)$
- $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-p}/(p+1)\} = e^{-(t-1)}U(t-1)$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. En déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) - e^{-p}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1})$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls ; il reste donc $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(t) = 2(1 - e^{-t})$ pour $0 \leq t < 1$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1). Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième.**

1. À $t = 1$, l'expression valable pour $t \geq 1$ donne $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$.
2. En simplifiant, $s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}264$, soit au dixième près $1{,}3$.

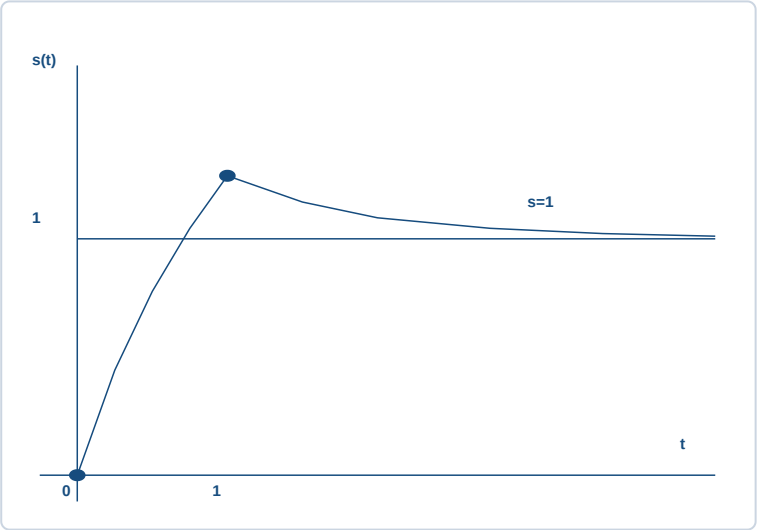
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

De 0 à 1, la courbe suit $2(1 - e^{-t})$ et croît jusqu'à $s(1) = 2 - \frac{2}{e}$. À partir de 1, elle suit $(e-2)e^{-t} + 1$, décroît et tend vers l'asymptote horizontale $s = 1$. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$: la courbe est continue.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe croissante jusqu'à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme $e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, le terme exponentiel tend vers 0. Il reste la constante 1.

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, avec des questions sur les équations différentielles, l'analyse de fonctions, l'intégration et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; pour un second membre constant, on peut chercher une solution particulière constante.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle : $d = \int f(t)\,dt$.
- La transformée de Laplace de $U(t - a)$ est e^{-ap}/p ; un décalage temporel multiplie la transformée par e^{-ap}.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'une vitesse qui atteint zéro, et interpréter la limite dans le contexte du freinage.
- Vérifier une primitive en la dérivant et contrôler le signe lié à l'exponentielle.
- Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers zéro.
- Repérer le décalage à $t = 1$ dans les signaux et reporter les tracés demandés sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle avec un second membre constant ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis cherchez une solution particulière constante. La solution générale est la somme des deux formes. Utilisez ensuite la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot ?

Une primitive F de la vitesse donne la distance entre t_0 et t_1 par $F(t_1) - F(t_0)$. Calculez cette différence exactement, puis arrondissez le résultat au centimètre comme demandé.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 1 sont indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, gardez une marge pour les tracés et la relecture, et rendez le document-réponse.

Q : Que faut-il montrer dans les questions sur les transformées de Laplace ?

Établissez les égalités et les décompositions demandées, puis appliquez les formules du sujet pour revenir aux expressions temporelles. Respectez les intervalles indiqués et reportez les courbes sur le document-réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation de Systèmes Automatiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.