Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données de 2013 à 2021 décrivent le nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel et une fonction définie à partir d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Pour chaque année, on applique la transformation indiquée aux nombres d'équipés, exprimés en milliers : on retranche 30, puis on calcule le logarithme népérien. Par exemple, pour 2013, on obtient $\ln(56,25 - 30) \approx 3,268$. Les valeurs ci-dessous sont arrondies au millième et suivent l'ordre des années du tableau de l'énoncé.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
$y = \ln(N - 30)$	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, avec les valeurs de y_i arrondies au millième, donne une pente d'environ $0,0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2609$. Chacun de ces coefficients est ensuite arrondi au centième, comme demandé. La droite d'ajustement s'écrit donc avec les coefficients arrondis ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

1. Comme $y = \ln(N - 30)$, la droite d'ajustement donne $\ln(N - 30) = 0,08k + 3,26$.
2. On exponentie : $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$, avec $e^{3,26} \approx 26,05$.
3. On obtient ainsi l'expression demandée, où N est exprimé en milliers. Il s'agit du modèle déduit de la droite ajustée et non d'une nouvelle régression sur les nombres initiaux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, estimer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de l'année 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. On utilise directement le modèle de la partie A : $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,70$. Le résultat étant exprimé en milliers, cela correspond à environ 103 701 personnes. L'arrondi au millier près donne donc 104 000 personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 104 000 personnes équipées.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide sur le long terme et justifier la réponse.**

Le modèle prévoit une croissance exponentielle sans borne, car le coefficient de k dans l'exponentielle est positif. Or le pays compte 60 millions d'habitants. Si ce nombre reste stable, le nombre de personnes équipées ne peut pas augmenter indéfiniment au-delà de la population totale.

- À long terme, le modèle dépasserait 60 millions.
- Il n'est donc pas valide sur le long terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle finirait par dépasser la population stable de 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,05$. Ses solutions sont les fonctions exponentielles $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ainsi, sur l'intervalle demandé $[0; +\infty[$, toutes les solutions sont de cette forme, y compris la solution nulle lorsque $C = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. On cherche une solution constante $y(t) = c$. Sa dérivée est nulle.
2. En substituant dans $y' + 0,05y = 0,05$, on obtient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.
3. La fonction constante égale à 1 vérifie bien l'équation différentielle complète. Elle servira de solution particulière pour déterminer ensuite toutes les solutions.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène. La question précédente fournit la solution particulière constante égale à 1, tandis que l'équation homogène donne $Ce^{-0,05t}$. La somme de ces deux expressions constitue la famille de solutions sur $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, donner une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

La fonction g appartient à la famille trouvée précédemment : $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$. En utilisant la condition initiale à $t = 0$, on obtient $g(0) = 1 + C = 8$. Ainsi, $C = 7$. En remplaçant la constante dans l'expression générale, on obtient la fonction définie sur l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années depuis 2013 et f(t) le nombre de personnes équipées en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

L'année 2026 correspond à $t = 2026 - 2013 = 13$. Avec le modèle de la partie B, $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,684$. Cette valeur est en milliers de personnes, soit environ 96 684 personnes. L'arrondi au millier près demandé conduit à 97 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 2026 : environ 97 000 personnes équipées.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Le dénominateur $1 + 7e^{-0,05t}$ tend donc vers 1, tandis que le numérateur reste égal à 450. La fonction tend ainsi vers 450. Comme elle est exprimée en milliers de personnes, le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) obtenue par logiciel de calcul formel, déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

L'expression donnée est $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc le numérateur est positif. Le dénominateur est également strictement positif.

- Ainsi, $f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$.
- Le nombre de personnes équipées augmente continuellement selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante : le nombre d'équipés augmente selon le modèle.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

On résout $f(t) > 120$: $\dfrac{450}{1+7e^{-0{,}05t}} > 120$, soit $t > -20\ln(11/28) \approx 18{,}69$. Le seuil est donc franchi entre les rangs 18 et 19. Comme les années sont repérées par des rangs entiers depuis 2013, on vérifie le premier rang entier supérieur au seuil : $t = 19$, qui correspond à 2032.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le premier rang annuel où le nombre dépasse 120 000 est 2032.

2. Approvisionnement, pannes et qualité d’une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d’eau et une file de bouteilles vides. L’exercice porte sur les défauts d’approvisionnement, les pannes sur 200 jours et un test statistique vérifiant si le volume moyen rempli correspond au réglage attendu de 75 cL.

Partie A - Défaut d’approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l’unique information correspondante du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas, événement où la file se vide mais pas le réservoir, probabilité que les deux soient vides au moins une fois, et probabilité d’un défaut d’approvisionnement. Les événements A et B sont indépendants, avec P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02. Aucune justification n’est demandée.

La file ne se vide pas correspond à la probabilité complémentaire de A : $1 - 0{,}03 = 0{,}97$. « La file se vide mais pas le réservoir » est l’événement $A \cap \bar{B}$. L’indépendance donne $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$. Enfin, le défaut d’approvisionnement correspond à $A \cup B$: $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. La probabilité d’une panne un jour donné est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Pour une période de 200 jours, indiquer sans justification la loi suivie par X, le nombre de jours de panne, et en préciser les paramètres.

Chaque jour constitue une épreuve indépendante, avec une probabilité de panne constante égale à 0,025. Le nombre X de jours de panne sur 200 jours suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}025$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale B(200 ; 0,025).

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

Pour approcher la loi binomiale par une loi de Poisson, on prend $\lambda = np$. Ainsi, $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour Y de loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} 5^k/k! \approx 0{,}9863047$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule donnée pour les probabilités d'une loi de Poisson, dire si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule donnée donne $P(Y = 15) = 5^{15}e^{-5}/15! \approx 0{,}000157$. Cette valeur est strictement positive : la probabilité paraît nulle sur le graphique uniquement parce qu'elle est très faible.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conjecture fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir du tableau des volumes mesurés pour 100 bouteilles, déterminer à l'aide de la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée est $\bar{x} = (73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7)/100 = 74{,}73$ cL. L'écart type calculé avec les 100 bouteilles vaut $\sqrt{(\sum n_i(x_i - 74{,}73)^2/100)} \approx 1{,}103$ cL, soit 1,10 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74{,}73$ cL ; $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Question 2.a. **Sous H_0 : $\mu = 75$, la moyenne Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer un nombre réel h tel que $P(75 - h \leq Z \leq 75 + h) = 0{,}95$, à 10^{-2} près.**

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 correspond à environ 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL, soit 0,22 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % portant sur H_0 : $\mu = 75$ et H_1 : $\mu \neq 75$.

Avec h arrondi à 0,22 cL, l'intervalle de décision est [75 − 0,22 ; 75 + 0,22] = [74,78 ; 75,22] cL.

- Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0.
- Si elle est en dehors de l'intervalle, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $\bar{x} \in [74{,}78 ; 75{,}22]$ cL ; la rejeter sinon.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, dire si l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ peut être acceptée.

La moyenne observée est 74,73 cL. Elle est inférieure à la borne basse de l'intervalle de décision, 74,78 cL ; elle n'appartient donc pas à [74,78 ; 75,22] cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices étudient la modélisation de l'évolution d'un implant médical et le fonctionnement d'une machine à embouteiller, en mobilisant ajustement, équations différentielles, probabilités, loi de Poisson et test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Avec y = ln(N - 30), un ajustement y = ak + b conduit à N(k) = 30 + e^(ak+b).
- Pour y' + ay = c, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière constante à Ce^(-ax).
- Pour n essais indépendants de probabilité p, le nombre de succès suit B(n,p) et son approximation de Poisson a pour paramètre λ = np.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour les modèles de l'implant, respecter les unités en milliers et le temps t compté depuis 2013.
- Pour les événements indépendants, distinguer complément, intersection et union avant de calculer les probabilités.
- Une probabilité de Poisson très faible n'est pas nécessairement nulle.
- Pour le test, utiliser l'écart type 0,11 sous H_0 et appliquer la règle de décision à la moyenne observée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver le modèle exponentiel après le changement de variable logarithmique ?

On ajuste les valeurs y = ln(N - 30) par une droite y = ak + b. En exponentiant, N - 30 = e^(ak+b), donc le modèle s'écrit N(k) = 30 + e^(ak+b).

Q : Pourquoi le nombre de pannes est-il approché par une loi de Poisson de paramètre 5 ?

Le nombre de pannes sur 200 jours suit une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025. L'approximation de Poisson prend pour paramètre λ = np, soit 200 × 0,025 = 5.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points et plusieurs parties indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, commencez par les questions accessibles et gardez quelques minutes pour contrôler les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Que vérifier avant de conclure le test sur le volume des bouteilles ?

Sous H_0, utilisez l'écart type 0,11 pour déterminer l'intervalle central à 95 %. Comparez ensuite la moyenne de l'échantillon à cet intervalle et formulez la décision conformément à la règle énoncée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2022/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation de Systèmes Automatiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.