Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2024 • Code sujet : **24MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Probabilités et lois appliquées à l'étude des coccinelles** (12 questions) — **Page 3**

2. **Modélisation de la teneur en matière grasse lors d'une transition de production** (13 questions) — **Page 8**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2024/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 8-Sujet.pdf

1. Probabilités et lois appliquées à l'étude des coccinelles

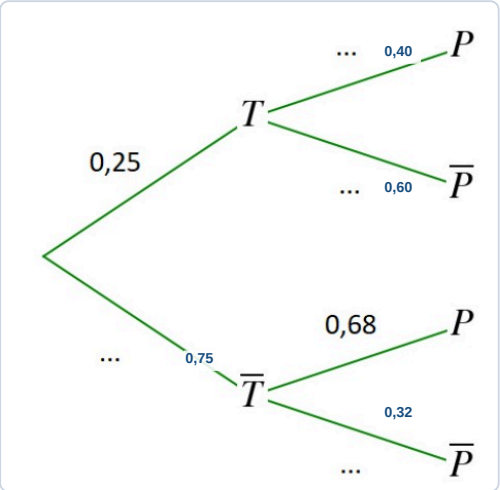
L'exercice étudie les liens entre la taille des coccinelles et leur type de pronotum, puis modélise la présence de coccinelles à deux points dans des échantillons. Il aborde aussi la taille, la ponte et la durée de vie de coccinelles dans des situations d'élevage et de lutte contre les pucerons.

Question 1

Question 1.a). Compléter sur l'annexe à rendre l'arbre de probabilités décrivant les événements T (taille inférieure ou égale à 5 mm) et P (pronotum de type P), à partir des données fournies.

La première séparation porte sur la taille : la branche T vaut 0,25 et sa branche contraire vaut 1 − 0,25 = 0,75. Depuis T, les branches P et P̄ portent respectivement 0,40 et 1 − 0,40 = 0,60. Depuis T̄, les branches P et P̄ portent 0,68 et 1 − 0,68 = 0,32. Les probabilités de chaque paire de branches issues d'un même nœud totalisent 1. L'annexe est annotée avec ces quatre probabilités manquantes.

Arbre complété : probabilités des branches



✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre : T = 0,25, T̄ = 0,75 ; depuis T, P = 0,40 et P̄ = 0,60 ; depuis T̄, P = 0,68 et P̄ = 0,32.

Question 1.b). Déterminer la probabilité qu'une coccinelle prélevée au hasard ait une taille inférieure ou égale à 5 mm et n'ait pas un pronotum de type P. Arrondir les probabilités à 10^{-3}.

L'événement demandé correspond au chemin T puis P̄. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité de T par la probabilité conditionnelle de P̄ sachant T. Or P(T) = 0,25 et P(P̄|T) = 1 − 0,40 = 0,60. On obtient donc 0,25 × 0,60. Il s'agit de la probabilité qu'une coccinelle soit à la fois de taille inférieure ou égale à 5 mm et dépourvue d'un pronotum de type P.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité recherchée est P(T ∩ P̄) = 0,150, soit 15 % des coccinelles de la forêt.

Question 1.c). Déterminer la probabilité qu'une coccinelle prélevée au hasard dans la forêt n'ait pas un pronotum de type P. Arrondir les probabilités à 10^{-3}.

L'événement $\bar{P}$ se réalise par deux chemins incompatibles de l'arbre : T puis $\bar{P}$, ou $\bar{T}$ puis $\bar{P}$. On additionne leurs probabilités. Le premier chemin a pour probabilité $0{,}25 \times (1 - 0{,}40)$, et le second $0{,}75 \times (1 - 0{,}68)$. Ainsi, $P(\bar{P}) = 0{,}25 \times 0{,}60 + 0{,}75 \times 0{,}32$. Cette somme donne la proportion de toutes les coccinelles de la forêt qui n'ont pas un pronotum de type P.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'une coccinelle n'ait pas un pronotum de type P est $P(\bar{P}) = 0{,}390$, soit 39 %.

Question 1.d). Déterminer la probabilité qu'une coccinelle prélevée ait une taille inférieure ou égale à 5 mm sachant qu'elle n'a pas un pronotum de type P. Arrondir les probabilités à 10^{-3}.

On utilise la formule d'une probabilité conditionnelle : $P(T|\bar{P}) = P(T \cap \bar{P}) / P(\bar{P})$. Le numérateur, calculé à la question précédente, vaut $0{,}25 \times 0{,}60 = 0{,}15$. Le dénominateur vaut 0,39. Ainsi, $P(T|\bar{P}) = 0{,}15 / 0{,}39$. Cette probabilité décrit, parmi les coccinelles sans pronotum de type P, la proportion de celles dont la taille est inférieure ou égale à 5 mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les coccinelles sans pronotum de type P, la probabilité d'avoir une taille ≤ 5 mm est environ 0,385.

Question 2

Question 2.a). Donner la loi suivie par X, le nombre de coccinelles à deux points dans un échantillon de 10 coccinelles, et préciser ses paramètres. Aucune justification n'est demandée.

La variable X compte, parmi 10 coccinelles prélevées, celles qui sont à deux points. Chaque prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, et la probabilité d'obtenir une coccinelle à deux points est constante, égale à 0,15. X suit donc une loi binomiale, dont le premier paramètre est le nombre de tirages et le second la probabilité de succès. La question ne demande pas de justification : il suffit de préciser la loi et ses deux paramètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre X de coccinelles à deux points suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}15$.

Question 2.b). Calculer la probabilité qu'un prélèvement aléatoire de 10 coccinelles contienne au moins une coccinelle à deux points. Arrondir les probabilités à 10^{-3}.

On calcule d'abord l'événement contraire : aucune des 10 coccinelles n'est à deux points. À chaque tirage, la probabilité de ne pas en obtenir une vaut 1 − 0,15 = 0,85. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, la probabilité de n'en obtenir aucune est $0{,}85^{10}$. On soustrait ce résultat de 1 pour obtenir la probabilité d'en avoir au moins une, puis on arrondit au millième demandé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La probabilité d'avoir au moins une coccinelle à deux points dans l'échantillon est $1 - 0{,}85^{10} \approx 0{,}803$.

Question 3

Question 3.a). La taille d'une coccinelle de l'élevage suit une loi uniforme sur l'intervalle [3 ; 6] mm. Calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 4 mm et 5 mm. Arrondir les probabilités à 10^{-3}.

Pour une loi uniforme sur [3 ; 6], la probabilité d'un intervalle est le quotient de sa longueur par celle de l'intervalle total. L'intervalle des tailles recherchées, [4 ; 5], a une longueur de 5 − 4 = 1 mm. L'intervalle total [3 ; 6] a une longueur de 6 − 3 = 3 mm. La probabilité vaut donc 1/3, puis s'arrondit au millième. Inclure ou exclure les bornes ne change pas le résultat pour une loi continue.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La probabilité que la taille soit comprise entre 4 mm et 5 mm vaut 1/3, soit environ 0,333.

Question 3.b). Déterminer la taille moyenne des coccinelles de l'élevage modélisée par la loi uniforme sur [3 ; 6] mm.

Pour une loi uniforme sur un intervalle [a ; b], l'espérance est le milieu de l'intervalle : (a + b)/2. Ici, les deux bornes sont 3 mm et 6 mm. La taille moyenne modélisée est donc (3 + 6)/2. Cette valeur est la moyenne théorique des tailles dans l'élevage selon le modèle uniforme donné par l'énoncé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La taille moyenne des coccinelles de l'élevage est (3 + 6)/2 = 4,5 mm.

Question 4

Question 4.a). Le nombre d'œufs par ponte suit une loi normale d'espérance 35 et d'écart-type 6. Donner le nombre moyen d'œufs par ponte.

Pour une variable aléatoire qui modélise le nombre d'œufs par ponte, l'espérance représente le nombre moyen d'œufs par ponte. L'énoncé donne directement l'espérance de U, égale à 35. L'écart-type de 6 œufs renseigne sur la dispersion autour de cette moyenne, mais n'intervient pas dans cette question. Il suffit donc de reprendre la valeur de l'espérance et de l'exprimer dans le contexte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre moyen d'œufs par ponte d'une coccinelle à deux points est 35 œufs.

Question 4.b). Calculer la probabilité que le nombre d'œufs par ponte soit compris entre 31 et 39, bornes incluses. Arrondir les probabilités à 10^{-3}.

La variable U suit une loi normale d'espérance 35 et d'écart-type 6. Après centrage et réduction, les bornes deviennent (31 − 35)/6 = −2/3 et (39 − 35)/6 = 2/3. Par symétrie de la loi normale centrée réduite, la probabilité cherchée est deux fois la probabilité entre 0 et 2/3. La lecture ou le calcul à la calculatrice donne environ 0,495, à arrondir au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que la ponte compte entre 31 et 39 œufs inclus est $P(31 \leq U \leq 39) \approx 0{,}495$.

Question 4.c). Déterminer un entier h tel que la probabilité que le nombre d'œufs soit compris entre 35 - h et 35 + h soit approximativement égale à 0,95 à 10^{-2} près, puis interpréter cette probabilité dans le contexte.

La loi est centrée en 35 et son écart-type vaut 6. Pour couvrir environ 95 % des valeurs autour de la moyenne, on utilise l'intervalle centré réduit approximatif [−1,96 ; 1,96]. La demi-largeur correspondante est 1,96 × 6 = 11,76 ; l'entier le plus proche est h = 12. L'intervalle est alors [35 − 12 ; 35 + 12] = [23 ; 47]. Sa probabilité, environ 0,9545, s'arrondit à 0,95 au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On peut choisir h = 12 : environ 95 % des pontes comptent entre 23 et 47 œufs, bornes incluses.

Question 5

Question 5. Pour un lot de 80 larves, le vendeur annonce une durée de vie suivant une loi normale d'espérance 20 jours et d'écart-type 3 jours. À partir de la moyenne observée de 18 jours, effectuer le test bilatéral au seuil de confiance de 95 % à l'aide de la formule d'intervalle fournie, puis déterminer si l'annonce peut être remise en question.

Sous l'hypothèse de l'annonce, la moyenne des 80 durées de vie doit se situer dans l'intervalle à 95 % donné. Avec m = 20, σ = 3 et n = 80, ses bornes sont 20 − 1,96 × 3/√80 et 20 + 1,96 × 3/√80, soit environ 19,343 et 20,657 jours. La moyenne observée de 18 jours est inférieure à la borne basse. Elle est donc incompatible avec l'annonce au seuil de confiance de 95 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 18 jours n'appartient pas à l'intervalle [19,343 ; 20,657] jours : Michel peut remettre en question l'annonce au seuil de 95 %.

2. Modélisation de la teneur en matière grasse lors d'une transition de production

Dans une usine agroalimentaire, une ligne passe en continu de la variété M1 à la variété M2 en augmentant la teneur en matière grasse, et la production transitoire est recyclée. Les mesures expérimentales, des modèles exponentiels, un algorithme et une intégrale servent à étudier cette évolution et le seuil de commercialisation.

Partie A

Question 1. À partir du nuage des mesures de teneur en matière grasse en fonction du temps, indiquer si un ajustement linéaire paraît approprié et justifier la réponse.

Sur le graphique, les points ne sont pas alignés : la teneur augmente rapidement au début, puis la hausse ralentit et les valeurs se rapprochent d'un palier. Une droite ne rendrait donc pas compte de cette évolution sur l'ensemble de l'intervalle. Un ajustement linéaire ne paraît pas approprié.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le nuage est courbe et tend à se stabiliser.

Question 2.a). Avec $z_i = \ln(0{,}152 - y_i)$, indiquer les deux valeurs manquantes z_1 et z_2 du tableau, arrondies à 10^{-3}.

On applique la définition du tableau à chaque mesure : pour t = 1, $y_1 = 0{,}108$, donc $z_1 = \ln(0{,}152 - 0{,}108) = \ln(0{,}044) \approx -3{,}124$. Pour t = 2, $y_2 = 0{,}121$, donc $z_2 = \ln(0{,}152 - 0{,}121) = \ln(0{,}031) \approx -3{,}474$. Les deux résultats sont arrondis au millième, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $z_1 = -3{,}124$ et $z_2 = -3{,}474$.

Question 2.b). À l'aide de la calculatrice et de la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage $(t_i ; z_i)$, sous la forme $z = at + b$, avec a et b arrondis à 10^{-3}.

La régression porte sur les onze valeurs du tableau, avec z_1 et z_2 arrondis au millième. On obtient la pente par le quotient de la somme des produits centrés par la somme des carrés des écarts des temps. L'ordonnée à l'origine se déduit ensuite des moyennes : b = moyenne(z) − a × moyenne(t). Les coefficients sont arrondis au millième.

Coefficient	Valeur arrondie
a	−0,435
b	−2,658

✓ RÉPONSE À RETENIR

z = −0,435t − 2,658.

Question 2.c). En prenant a = -0,44 et b = -2,7 dans l'ajustement z = at + b, déterminer l'expression de la fonction y qui ajuste le nuage (t_i ; y_i) dans le cadre de cette modélisation.

On utilise z = ln(0,152 − y) et l'ajustement z = −0,44t − 2,7. En exponentiant les deux membres, on obtient 0,152 − y = e^(−0,44t − 2,7). Il reste à isoler y : la teneur ajustée est égale à 0,152 moins cette exponentielle. Cette expression est le modèle demandé pour le nuage (t_i ; y_i).

✓ RÉPONSE À RETENIR

y(t) = 0,152 − e^(−0,44t − 2,7).

Partie B

Question 1.a). La teneur est modélisée par $C(t) = 0,152 - 0,067e^{-0,4t}$. Calculer C(2), arrondie à 10^{-3}, et interpréter le résultat par rapport à la situation étudiée.

La fonction donnée dans le sujet est C(t) = 0,152 − 0,067e^(−0,44t). On remplace t par 2 : C(2) = 0,152 − 0,067e^(−0,44 × 2) ≈ 0,12421. Arrondie au millième, la teneur vaut 0,124. Il s'agit de la proportion de matière grasse modélisée deux minutes après le démarrage de la transition, soit environ 12,4 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

C(2) ≈ 0,124, soit environ 12,4 %.

Question 1.b). Calculer la dérivée de C, en déduire le sens de variation de C sur [0 ; 10], puis indiquer si ce résultat est cohérent avec la situation étudiée.

La dérivée de C(t) = 0,152 − 0,067e^(−0,44t) est C′(t) = 0,067 × 0,44e^(−0,44t) = 0,02948e^(−0,44t). L'exponentielle étant strictement positive, C′(t) > 0 sur [0 ; 10]. La fonction C est donc strictement croissante sur cet intervalle, ce qui est cohérent avec l'injection continue de matière grasse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

C′(t) = 0,02948e^(−0,44t) > 0 : C est strictement croissante.

Question 2. Exécuter l'algorithme présenté, qui augmente M d'une unité et calcule D = C(M) tant que D ≤ 0,149, puis donner la valeur numérique renvoyée.

L'algorithme augmente M d'une unité avant de calculer C(M), et poursuit tant que D ≤ 0,149. Avec l'expression du sujet, C(7) = 0,152 − 0,067e^(−0,44 × 7) ≈ 0,148921 : la boucle continue. Puis C(8) ≈ 0,150017, donc D > 0,149 et la boucle s'arrête. La valeur renvoyée est la valeur courante de M.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme renvoie 8.

Question 3.a). Sachant que l'équation C(t) = 0,149 admet une unique solution T sur [0 ; 10], déterminer une valeur approchée de T à 10^{-2} près.

On résout l'équation 0,152 − 0,067e^(−0,44T) = 0,149. Elle équivaut à e^(−0,44T) = 0,003/0,067, puis à T = −ln(0,003/0,067)/0,44. On obtient T ≈ 7,0593 minutes. L'arrondi au centième est donc 7,06 minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> T ≈ 7,06 minutes.

Question 3.b). À partir de la valeur de T, déterminer à la seconde près le temps à attendre après le démarrage de la transition pour obtenir une variété M2 commercialisable.

La solution non arrondie est T ≈ 7,059273 minutes. Cela correspond à 7 minutes, puis à 0,059273 × 60 ≈ 3,56 secondes. À la seconde près, le seuil de 0,149 est atteint après 7 minutes et 4 secondes. La teneur dépassant le seuil juste après cet instant, la variété M2 devient alors commercialisable.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Temps d'attente : 7 min 4 s.

Partie C

Question 1. Pour $f(t) = 0,152 - 0,062e^{-0,5t}$ et $F(t) = 0,152t + 0,124e^{-0,5t}$, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; 10].

On dérive F terme à terme. La dérivée de 0,152t est 0,152. Pour le second terme, la dérivée de e^(−0,5t) apporte le facteur −0,5 : (0,124e^(−0,5t))′ = −0,062e^(−0,5t). Ainsi, F′(t) = 0,152 − 0,062e^(−0,5t) = f(t) sur [0 ; 10]. F est donc bien une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

F′(t) = f(t) : F est une primitive de f sur [0 ; 10].

Question 2.a). À l'aide de la primitive précédente, déduire que l'arrondi à 10^{-4} de l'intégrale de f entre 0 et 6 est 0,7942.

Par le théorème fondamental, $\int_0^6 f(t)dt = F(6) - F(0)$. Avec F(t) = 0,152t + 0,124e^(−0,5t), cela donne 0,152 × 6 + 0,124e^(−3) − 0,124 ≈ 0,7941736. L'arrondi au dix-millième est bien 0,7942.

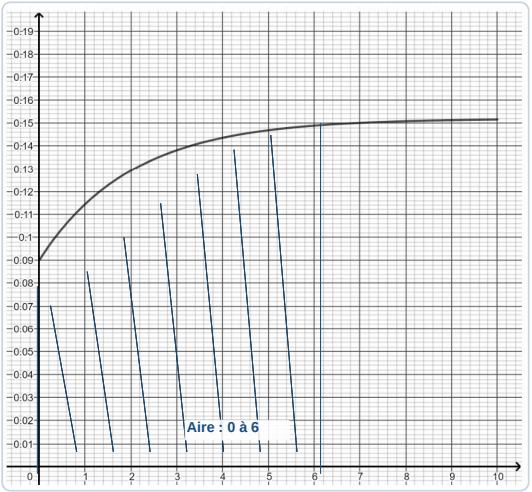
✓ RÉPONSE À RETENIR

$\int_0^6 f(t)dt \approx 0,7942$.

Question 2.b). Hachurer sur le graphique fourni en annexe à rendre le domaine dont l'aire est égale à l'intégrale de f entre 0 et 6.

L'intégrale représente l'aire sous la courbe de f et au-dessus de l'axe horizontal, entre les abscisses t = 0 et t = 6. Sur l'annexe, il faut donc hachurer uniquement ce domaine, délimité par la courbe, l'axe des temps et les deux droites verticales d'abscisses 0 et 6.

Aire sous la courbe entre 0 et 6



✓ RÉPONSE À RETENIR

Hachurer sous la courbe de f, entre t = 0 et t = 6, au-dessus de l'axe horizontal.

Question 3. **On note m la valeur moyenne de f sur [0 ; 6], définie par $m = (1/6)\int_0^6 f(t)dt$. Calculer m à 10^{-3} près et interpréter la valeur obtenue dans le contexte.**

La valeur moyenne de f sur [0 ; 6] est l'intégrale sur cet intervalle divisée par sa longueur. Ainsi, m = 0,7941736…/6 ≈ 0,132362. Arrondie au millième, la teneur moyenne pendant les six premières minutes est 0,132, soit environ 13,2 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> m ≈ 0,132, soit une teneur moyenne d'environ 13,2 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2024)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2024, porte le code 24MATGRD1 et dure 2 heures. Le coefficient dépend de la spécialité et varie de 1 à 2. Deux exercices de 10 points étudient les probabilités liées aux coccinelles et la transition agroalimentaire M1-M2. Les compétences évaluées couvrent les lois de probabilité, les ajustements, les fonctions, les algorithmes et les intégrales.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La probabilité conditionnelle vérifie $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, si $P(B)$ est non nulle.
- Le nombre de succès lors de n tirages indépendants de probabilité p suit une loi binomiale B(n ; p).
- L'intervalle de confiance à 95 % d'une moyenne est $[m - 1{,}96\sigma/\sqrt{n} ; m + 1{,}96\sigma/\sqrt{n}]$.
- L'intégrale d'une fonction positive représente l'aire sous sa courbe ; sa valeur moyenne sur [a ; b] est l'intégrale divisée par b - a.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection, et renseigner chaque branche de l'arbre avec la bonne probabilité.
- Pour « au moins une », utiliser l'événement contraire et identifier correctement les paramètres de la loi binomiale.
- Dans le test bilatéral, comparer la moyenne observée à l'intervalle calculé et conclure dans le contexte.
- Respecter les arrondis, les unités et le seuil strict de commercialisation : la teneur doit dépasser 0,149.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la probabilité d'avoir au moins une coccinelle à deux points dans l'échantillon ?

On calcule d'abord la probabilité qu'aucune des 10 coccinelles ne soit à deux points : $(1 - 0{,}15)^{10}$. On la soustrait de 1 pour obtenir la probabilité d'en avoir au moins une.

Q : Comment savoir si la moyenne observée remet en cause l'annonce sur la durée de vie ?

On calcule l'intervalle à 95 % avec la moyenne annoncée, l'écart-type et la taille du lot. Si la moyenne observée est en dehors de l'intervalle, l'annonce est remise en question au seuil considéré.

Q : Comment répartir les deux heures entre les exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et certaines questions sont indépendantes. Répartissez le temps en fonction de leur difficulté, gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et respectez les arrondis demandés.

Q : Que faut-il inclure dans une interprétation ou une conclusion pour le jury ?

Reliez le résultat à la situation en précisant la grandeur étudiée et ses unités. Pour le test, indiquez explicitement si la moyenne observée conduit à remettre en question l'annonce ; pour la production, reliez la teneur au seuil commercialisable.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2024/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2024 - 8-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation de Systèmes Automatiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.