Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRC2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de l’épaisseur moyenne des glaciers (13 questions) **Page 3**

2. Contrôle de la fabrication de forets (11 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2025/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 6-Sujet.pdf

1. Évolution de l'épaisseur moyenne des glaciers

À partir d'un tableau de variations depuis 1956 et de graphiques, l'exercice étudie l'évolution de l'épaisseur moyenne des glaciers dans le monde. Il demande de construire un ajustement exponentiel, de l'utiliser pour des estimations et d'étudier les variations et la limite d'une fonction modèle.

Partie A - Première modélisation

Question 1. À partir du nuage de points des données, dire si un ajustement affine de y en x semble approprié et justifier la réponse.

Les points du nuage suivent une courbe : la baisse de *y* est faible au début, puis s'accentue nettement lorsque *x* augmente. Ils ne sont donc pas répartis autour d'une droite. Un ajustement affine de *y* en *x* ne semble pas approprié pour représenter ces données.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le nuage est courbe, donc un ajustement affine n'est pas adapté.

Question 2. En posant $z_i = \ln(-y_i)$ pour chaque valeur x_i, recopier et compléter les quatre dernières colonnes du tableau, en arrondissant les résultats au millième.

Pour chaque valeur, on calcule le logarithme népérien de l'opposé de l'épaisseur, soit $z_i = \ln(-y_i)$, puis on arrondit au millième.

x_i	**40**	**50**	**60**	**63**
y_i	-13	-18	-27	-30
z_i	2,565	2,890	3,296	3,401

Ces quatre valeurs complètent les colonnes demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $2{,}565\ ;\ 2{,}890\ ;\ 3{,}296\ ;\ 3{,}401.$

Question 3.a. Pour l'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés, préciser le coefficient de corrélation linéaire r et l'arrondir au millième.

En appliquant la méthode des moindres carrés aux huit couples (x_i, z_i), on obtient un coefficient de corrélation linéaire positif, très proche de 1. Les valeurs de x et de z sont donc fortement corrélées, ce qui rend pertinent l'ajustement affine de z en x. Arrondi au millième, le coefficient vaut $0{,}995$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r \approx 0{,}995.$

Question 3.b. **Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés, en arrondissant ses coefficients au millième.**

La droite d'ajustement obtenue par les moindres carrés s'écrit sous la forme $z = mx + b$. Le calcul donne une pente d'environ $0{,}041$ et une ordonnée à l'origine d'environ $0{,}867$. Après arrondissement de chaque coefficient au millième, une équation de la droite est donc $z = 0{,}041x + 0{,}867$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $z = 0{,}041x + 0{,}867$.

Question 4. **Déduire de l'ajustement affine de z en x un ajustement de y en x sous la forme y = A e^(ax), puis arrondir A au centième et a au millième.**

Comme $z = \ln(-y)$, la droite précédente donne $\ln(-y) = 0{,}041x + 0{,}867$. En exponentiant, on obtient $-y = e^{0{,}867}e^{0{,}041x}$. Ainsi $y = -e^{0{,}867}e^{0{,}041x}$. Le coefficient A est négatif, et son arrondi au centième vaut $-2{,}38$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y \approx -2{,}38e^{0{,}041x}$.

Question 5. **À l'aide du modèle obtenu, estimer l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers en 2030 et arrondir le résultat à l'unité.**

Le rang correspondant à 2030 est $x = 2030 - 1960 = 70$, puisque le rang 0 correspond à 1960. En utilisant le modèle arrondi, on calcule $y(70) = -2{,}38e^{0{,}041\times 70} \approx -42$. Le signe négatif indique une diminution par rapport à 1956 : l'épaisseur moyenne perdue est donc de 42 m, à l'unité près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Perte moyenne estimée en 2030 : 42 m.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **À partir du graphique de la fonction f, estimer l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers en 1980 par rapport à 1956, avec la précision permise par le graphique.**

Le graphique utilise le rang $x = 0$ pour l'année 1960. Pour 1980, on a donc $x = 1980 - 1960 = 20$. À cette abscisse, la courbe se situe près de -6 m. Cette valeur est une variation par rapport à 1956 : elle correspond à une perte moyenne d'environ 6 m, lue graphiquement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 1980, la perte est d'environ 6 m.

Question 1.b. À partir du graphique de la fonction f, estimer au cours de quelle année l'épaisseur moyenne a diminué de 30 m par rapport à 1956.

Sur le graphique, la courbe atteint le niveau -30 m pour un rang d'environ 64. Comme le rang 0 correspond à 1960, l'année estimée est $1960 + 64 = 2024$. Il s'agit d'une lecture graphique, donc la date est approximative et doit être donnée comme une estimation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La perte de 30 m est atteinte vers 2024.

Question 2. Sachant que f(x) = -2,3e^(0,04x), estimer par le calcul au cours de quelle année l'épaisseur moyenne aura diminué de 50 m par rapport à 1956.

On cherche x tel que $-2{,}3e^{0{,}04x} = -50$, donc $e^{0{,}04x} = 50/2{,}3$. En prenant le logarithme, $x = \ln(50/2{,}3)/0{,}04 \approx 76{,}978$. L'année correspondante est $1960 + x \approx 2037$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La perte de 50 m est prévue vers 2037.

Question 3.a. Calculer f'(x) pour x appartenant à [0 ; +∞[, sachant que f(x) = -2,3e^(0,04x).

On dérive l'exponentielle composée en multipliant par la dérivée de son exposant : $(e^{0{,}04x})' = 0{,}04e^{0{,}04x}$. Le facteur constant $-2{,}3$ est conservé. Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = -2{,}3 \times 0{,}04e^{0{,}04x}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(x) = -0{,}092e^{0{,}04x}$.

Question 3.b. Donner le signe de f'(x) sur [0 ; +∞[, puis en déduire les variations de f sur cet intervalle.

Pour tout $x \geq 0$, l'exponentielle $e^{0{,}04x}$ est strictement positive. Le facteur $-0{,}092$ étant négatif, le produit $f'(x)$ est négatif sur tout l'intervalle. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$[0;+\infty[$
Signe de $f'(x)$		$-$
Variations de f		strictement décroissante

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Question 3.c. Dire si les variations de la fonction f sont cohérentes avec le contexte de l'exercice et justifier la réponse.

Oui, cette évolution est cohérente avec le contexte. La fonction décroît, donc ses valeurs deviennent de plus en plus négatives. Comme elles représentent la variation d'épaisseur par rapport à 1956, cela traduit une perte moyenne qui augmente au fil du temps, conformément aux données observées.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : les valeurs décroissantes traduisent une perte d'épaisseur qui augmente.

Question 4. Donner la limite de f en +∞, puis expliquer ce que l'on peut penser de cette modélisation sur le long terme et justifier.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{0,04x}$ tend vers $+\infty$. Comme son coefficient $-2,3$ est négatif, on obtient $f(x) \to -\infty$. Le modèle prévoirait donc une perte d'épaisseur sans limite, ce qui n'est pas réaliste sur le long terme.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; le modèle n'est pas réaliste à long terme.

2. Contrôle de la fabrication de forets

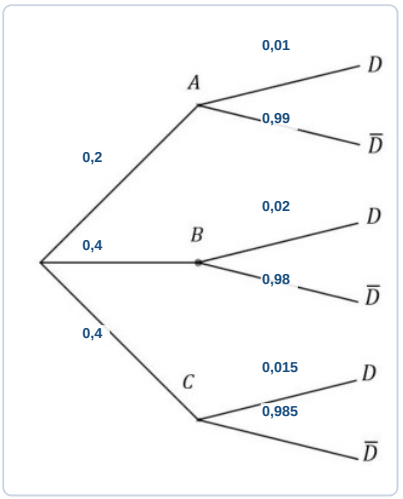
Une entreprise fabrique des forets avec trois machines, dont les parts de production et les taux de défaut sont précisés. L'exercice mobilise les probabilités conditionnelles, les lois binomiale et normale, puis un test d'hypothèse sur le réglage d'une machine après maintenance.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante pour la machine choisie et l'état défectueux ou non du foret.

La première branche indique la part de production de chaque machine. Depuis chaque machine, les deux branches suivantes donnent les probabilités conditionnelles d'obtenir un foret défectueux ou non défectueux. Pour chaque machine, ces probabilités complémentaires ont une somme égale à 1. Les valeurs sont reportées sur l'arbre de la page physique 6.

Arbre complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

A : 0,2 puis D : 0,01 et $\bar{D}$: 0,99 ; B : 0,4 puis 0,02 et 0,98 ; C : 0,4 puis 0,015 et 0,985.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un foret choisi au hasard provienne de la machine A et soit défectueux, soit P(A ∩ D).

On multiplie la probabilité que le foret provienne de A par la probabilité qu'il soit défectueux sachant qu'il provient de A : $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,2 \times 0,01$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap D) = 0,002$, soit 0,2 % de la production totale.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un foret choisi au hasard soit défectueux est P(D) = 0,016.**

Machine	Contribution à P(D)
A	0,2 × 0,01 = 0,002
B	0,4 × 0,02 = 0,008
C	0,4 × 0,015 = 0,006

Les machines A, B et C couvrent toute la production. On additionne donc les trois contributions pour obtenir la probabilité totale de défaut.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(D) = 0,002 + 0,008 + 0,006 = 0,016, soit 1,6 %.

Question 4. **Calculer P_D(B), c'est-à-dire la probabilité qu'un foret provienne de la machine B sachant qu'il est défectueux.**

1. P(B ∩ D) = 0,4 × 0,02 = 0,008.
2. La probabilité conditionnelle cherchée est $P_D(B) = P(B \cap D) / P(D) = 0,008 / 0,016$.

On divise la probabilité d'être défectueux et issu de B par la probabilité d'être défectueux.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_D(B) = 0,5$: parmi les forets défectueux, 50 % proviennent de la machine B.

Partie B - Contrôle de conformité

Question 1. **Expliquer pourquoi la variable aléatoire X, qui compte les forets défectueux parmi 100 forets prélevés, suit une loi binomiale, puis en donner les paramètres.**

Le prélèvement équivaut à 100 tirages avec remise : les tirages sont indépendants et la probabilité de défaut reste constante, égale à 0,016. Chaque tirage a deux issues, défectueux ou non défectueux. X compte le nombre de forets défectueux, donc le nombre de succès sur ces 100 tirages.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale B(100 ; 0,016), avec 100 tirages indépendants et une probabilité de défaut de 0,016.

Question 2. **Calculer la probabilité qu'aucun foret ne soit défectueux dans un prélèvement de 100 forets, et arrondir le résultat au millième.**

Aucun foret défectueux signifie X = 0. La probabilité qu'un foret ne soit pas défectueux vaut 1 − 0,016 = 0,984. Par indépendance des 100 tirages, $P(X = 0) = 0{,}984^{100} \approx 0{,}1993$. L'arrondi au millième donne 0,199.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'aucun des 100 forets ne soit défectueux est 0,199 au millième près.

Question 3. **Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux forets défectueux dans un prélèvement de 100 forets, et arrondir le résultat au millième.**

« Au plus deux » correspond aux cas X = 0, X = 1 ou X = 2. Avec X suivant B(100 ; 0,016), on additionne les trois probabilités : $P(X \leq 2) = 0{,}984^{100} + 100 \times 0{,}016 \times 0{,}984^{99} + 4\,950 \times 0{,}016^2 \times 0{,}984^{98} \approx 0{,}7842$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité d'avoir au plus deux forets défectueux est 0,784 au millième près.

Partie C - Contrôle du diamètre

Question Calcul. **La variable aléatoire Y donnant le diamètre, en millimètres, d'un foret produit par la machine B suit une loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 0,02. Calculer la probabilité qu'un foret ait un diamètre compris entre 9,95 mm et 10,05 mm, puis arrondir le résultat au millième.**

L'intervalle [9,95 ; 10,05] est centré sur la moyenne 10. En centrant-réduisant, ses bornes deviennent −2,5 et 2,5, car 0,05 / 0,02 = 2,5. Pour T suivant la loi normale centrée réduite, la probabilité cherchée vaut $P(-2{,}5 \leq T \leq 2{,}5) = 2\Phi(2{,}5) - 1 \approx 0{,}9876$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un foret de la machine B soit commercialisable est 0,988, soit 98,8 %.

Partie D - Test d'hypothèse

Question 1. **Pour le test bilatéral au seuil d'erreur de 5 % portant sur le diamètre moyen des forets produits par la machine C, donner l'hypothèse alternative H1 associée à H0 : m = 10.**

Le test est bilatéral : on cherche à déterminer si le diamètre moyen diffère de 10 mm, dans un sens ou dans l'autre. L'hypothèse alternative porte donc sur une valeur de m différente de celle de l'hypothèse nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

H_1 : m ≠ 10 mm.

Question 2. Sous l'hypothèse H0, déterminer une valeur de h, arrondie au millième, telle que P(10 - h ≤ Z ≤ 10 + h) = 0,95.

Valeur	Résultat
Quantile normal pour 95 % au centre	1,96
Écart-type de Z sous H_0	0,009
Demi-largeur h	1,96 × 0,009 = 0,01764

L'intervalle étant centré sur 10, h est le quantile 1,96 multiplié par l'écart-type de Z.

✓ RÉPONSE À RETENIR

h = 0,01764 mm, soit 0,018 mm au millième près.

Question 3. Pour un échantillon de 50 forets dont le diamètre moyen observé est de 9,97 mm, déterminer si l'on peut conclure, au seuil de 5 %, que la machine C est correctement réglée.

Sous H_0, l'intervalle d'acceptation au seuil de 5 % est [10 − 1,96 × 0,009 ; 10 + 1,96 × 0,009], soit [9,98236 ; 10,01764] mm. La moyenne observée, 9,97 mm, est inférieure à la borne basse : elle se trouve dans la région de rejet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non. On rejette H_0 au seuil de 5 % : la moyenne observée de 9,97 mm est hors de l'intervalle d'acceptation.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement C2, session 2025, code 25MATGRC2, d'une durée de 2 heures et de coefficient 1. L'exercice 1 étudie l'évolution de l'épaisseur des glaciers par ajustement et étude de fonction. L'exercice 2 porte sur le contrôle statistique de forets : probabilités conditionnelles, lois binomiale et normale, et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Si z = ln(-y) = b + ax, alors y = -e^b e^(ax), ce qui donne un modèle exponentiel de la forme A e^(ax).
- Dans un arbre pondéré, P(A ∩ D) = P(A) × P_A(D) et P_D(B) = P(B ∩ D) / P(D).
- Le nombre de défauts dans n tirages indépendants, avec une probabilité constante p, suit la loi binomiale B(n,p).
- Pour un test bilatéral au seuil de 5 %, l'intervalle central sous H0 contient 95 % des valeurs de la variable de test.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer l'année réelle du rang x : le rang 0 correspond à 1960 dans l'étude des glaciers.
- Respecter les arrondis demandés et conserver une précision suffisante avant l'arrondi final.
- Pour la loi binomiale, justifier les 100 tirages, leur indépendance et la probabilité constante de défaut.
- Pour le test, comparer la moyenne observée aux bornes de l'intervalle et conclure explicitement au seuil de 5 %.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer d'un ajustement affine de ln(-y) à un modèle exponentiel pour y ?

Si l'ajustement est z = b + ax et z = ln(-y), alors -y = e^(b+ax). Ainsi, y = -e^b e^(ax), ce qui est de la forme A e^(ax), avec A = -e^b.

Q : Comment calculer la probabilité d'avoir au plus deux forets défectueux ?

Avec X suivant la loi binomiale B(100 ; 0,016), additionner P(X = 0), P(X = 1) et P(X = 2). Arrondir ensuite la probabilité obtenue au millième, comme demandé dans le sujet.

Q : Comment organiser les deux heures entre les exercices ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun. Une répartition d'environ une heure par exercice est équilibrée, en gardant quelques minutes pour vérifier les calculs, les arrondis et la rédaction.

Q : Comment décider si la moyenne observée permet de rejeter l'hypothèse H0 ?

Comparer la moyenne observée à l'intervalle centré sur 10 mm contenant 95 % des moyennes sous H0. Si elle est à l'extérieur des bornes, rejeter H0 au seuil de 5 %.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscrsa.fr/assets/annales/bts-crsa/E2 - Mathématiques/2025/BTS CRSA - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 6-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception et Réalisation de Systèmes Automatiques : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.